Comparaison des suites

Grâce à la notion de limite, nous avons pu distinguer le comportement asymptotique des suites d'une façon assez satisfaisante : selon la valeur de leur limite quand elles en ont une, les suites peuvent être rangées dans des tiroirs différents.

Pourtant nous n'avons pas été assez loin : car par exemple, nous avons mis les suites $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le même tiroir ∞. Or ces suites ont des comportements très distincts : intuitivement l'infini de 2^n est bien plus grand que l'infini de n^2. On pourrait donner des exemples analogues en cas de limite nulle.

Comment évaluer la taille d'un infini ou d'un zéro ? Comment comparer deux infinis ou deux zéros ? C'est à ces quelques questions que nous allons répondre à présent.

1 Négligeabilité

1.1 Définition

Définition (Négligeabilité) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et un rang à partir duquel $u_n = \varepsilon_n v_n$.
Cette relation se note $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ et se lit « u_n est un petit o de v_n ».

En pratique, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, dire que $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ revient à dire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

✌✌✌ **Explication** Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, l'égalité $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang signifie que u_n est petit par rapport à v_n, de plus en plus petit à mesure que n grandit. D'où la terminologie : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette notion de négligeabilité est surtout intéressante quand on veut comparer deux infinis ou deux zéros : on peut ainsi dire que tel infini est plus petit que tel autre, etc.

Exemple $n^2 \underset{n\to\infty}{=} o(n^4)$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^4} = 0$. $\quad n^3 \underset{n\to\infty}{=} o(n^4)$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^4} = 0$. $\quad \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 0$.

✖✖✖ **<u>Attention</u> !** $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(0) \iff u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Or on ne travaille jamais avec la suite nulle — quel intérêt ? C'est pourquoi vous ne rencontrerez certainement jamais l'expression « $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(0)$ » en mathématiques. Banissez-la de vos copies !

1.2 Opérations sur les petits o

Théorème (Opérations sur les petits o) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) La multiplication par un réel non nul ne compte pas :

$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \text{ et si } \lambda \neq 0, \text{ alors } u_n \underset{n\to\infty}{=} o(\lambda v_n) \text{ et } \lambda u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n).$$

(ii) La somme de deux suites négligeables devant une **<u>même</u>** suite est négligeable :

$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \text{ et si } u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n), \text{ alors } u_n + u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n).$$

(iii) La relation « être négligeable » est transitive : si $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n)$.

(iv) Avec le produit, tout va bien : $\begin{cases} \text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \text{ et si } u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v'_n), \text{ alors } u_n u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n v'_n). \\ \text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n), \text{ alors } u_n w_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n w_n). \end{cases}$

(v) Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante et si $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{=} o\big(v_{\varphi(n)}\big)$.

✖✖✖ **Attention !** Avec les petits o, deux opérations sont formellement interdites.

- **Somme des deux côtés :** si $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ et si $u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v'_n)$, on n'a pas forcément $u_n + u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n + v'_n)$.
  Par exemple, on a $n - 1 \underset{n\to\infty}{=} o(n^2)$ et $1 \underset{n\to\infty}{=} o(1 - n^2)$, mais pourtant $n \underset{n\to\infty}{\cancel{=}} o(1)$.
- **Composition :** si $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$, on n'a pas forcément $f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} o\big(f(v_n)\big)$.
  Par exemple, on a $n \underset{n\to\infty}{=} o(n^2)$, mais pourtant, si on compose à gauche par $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\cancel{=}} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Démonstration

(i) Montrons que $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(\lambda v_n)$. Par hypothèse, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et un rang N à partir duquel $u_n = \varepsilon_n v_n$. Alors $u_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\lambda}\,(\lambda v_n)$ à partir du rang N et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{\lambda} = 0$. D'où le résultat.

Montrons que $\lambda u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$. Reprenons les notations précédentes. On a $\lambda u_n = (\lambda\varepsilon_n)v_n$ à partir du rang N et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\varepsilon_n = 0$. D'où le résultat.

(ii) Par hypothèse, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et un rang N à partir duquel $u_n = \varepsilon_n v_n$, ainsi qu'une suite $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et un rang N' à partir duquel $u'_n = \varepsilon'_n v_n$. Alors $u_n + u'_n = (\varepsilon_n + \varepsilon'_n)v_n$ à partir du rang $\max\big\{N, N'\big\}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (\varepsilon_n + \varepsilon'_n) = 0$. D'où le résultat.

(iii) Par hypothèse, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et un rang N à partir duquel $u_n = \varepsilon_n v_n$, ainsi qu'une suite $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et un rang N' à partir duquel $v_n = \varepsilon'_n w_n$. Alors $u_n = (\varepsilon_n\varepsilon'_n)w_n$ à partir du rang $\max\big\{N, N'\big\}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n\varepsilon'_n = 0$. D'où le résultat.

(iv) et (v) Débrouillez-vous. Pour (v), il faut utiliser le théorème sur les limites de suites extraites. ■

Nous avons jusqu'ici introduit la notation petit o sous sa forme la plus élémentaire (mise en relation de deux suites). Cette notation existe en réalité sous des formes assez diverses en mathématiques. Par exemple, vous rencontrerez souvent des expressions du genre « $u_n \underset{n\to\infty}{=} v_n + o(w_n)$ ». En l'occurrence, cette expression signifie simplement que $u_n = v_n + x_n$ où $x_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n)$; bref : u_n et v_n ne diffèrent que d'un petit o de w_n.

✌✌✌ **Explication**

- Partons de l'affirmation : $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Peu importe ici pourquoi cette affirmation est vraie.
  Grosso modo, cette proposition affirme que lorsque n est assez grand, $\dfrac{1}{n+1} \approx \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}$. Or une approximation n'a de sens que si l'on peut mesurer l'erreur commise. Ici il nous est dit que $\dfrac{1}{n+1} \approx \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}$ **à un** $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **près**. Le $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ représente le niveau de précision de l'approximation. C'est un peu comme quand on dit que $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près.
- Imaginez justement qu'on vous dise : « π est égal à 3,14012 à 10^{-2} près ». Vous répondrez naturellement : « Pourquoi ne pas se contenter de l'approximation 3,14, puisqu'on raisonne à 10^{-2} près ? » Et vous aurez raison : raisonner à 10^{-2} près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2}. Ainsi l'approximation $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près est aussi précise que l'approximation $\pi \approx 3,141592$ à 10^{-2} près, bien qu'on ait deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.
  Le même phénomène se produit avec les petits o. Ainsi, puisque $\dfrac{5}{n^3} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la quantité $\dfrac{5}{n^3}$ est inutile dans la relation $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; nous pouvons donc lui couper la tête et affirmer que $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
  Cette nouvelle proposition n'est ni plus ni moins précise que la précédente, mais elle est plus lisible.
  Vous devez vous habituer à penser les petits o comme des niveaux de précision ou encore comme des seuils de visibilité, et penser de vous-mêmes à « nettoyer » les formules que vous écrivez comme nous venons de le faire ci-dessus.

Théorème (Limites et petits o) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} \ell + o(1)$.
En particulier : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)$.

✎✎✎ **En pratique** Il est très important d'avoir en tête le fait qu'un $o(1)$ n'est rien d'autre qu'une suite de limite nulle.

Démonstration

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - \ell}{1} = 0 \iff u_n - \ell \underset{n\to\infty}{=} o(1) \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} \ell + o(1).$$ ■

1.3 Exemples fondamentaux

Théorème (Exemples fondamentaux de petits o)

(i) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $n^\alpha \underset{n\to\infty}{=} o(n^\beta)$.

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Alors $a^n \underset{n\to\infty}{=} o(b^n)$.

(iii) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. Alors $\left(\ln n\right)^\beta \underset{n\to\infty}{=} o(n^\alpha)$.

(iv) Soient $a, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. Alors $n^\alpha \underset{n\to\infty}{=} o(a^n)$.

(v) Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a^n \underset{n\to\infty}{=} o(n!)$.

Explication Ce théorème explique, dans la langue des petits o, que la factorielle est plus infinie que les exponentielles, que les exponentielles le sont plus que les puissances, qui le sont elles-mêmes plus que les puissances de logarithmes.

Démonstration

(i) Puisque $\alpha < \beta$, alors $\alpha - \beta < 0$, donc $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$ (résultat sur les fonctions puissances). Par composition, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-\beta} = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = 0$, i.e. enfin $n^\alpha \underset{n\to\infty}{=} o(n^\beta)$.

(ii) Puisque $0 < a < b$, alors $b \neq 0$ et $\left|\dfrac{a}{b}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$, et donc $a^n \underset{n\to\infty}{=} o(b^n)$.

(iv) et (v) Déjà vu : ce sont respectivement la comparaison exponentielles/puissances et la comparaison exponentielles/factorielle. ■

2 Equivalence

2.1 Définition

Définition (Equivalence) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang à partir duquel $u_n = \eta_n v_n$.
Cette relation se note $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

En pratique, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ revient à dire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Explication Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 1$, l'égalité $u_n = \eta_n v_n$ à partir d'un certain rang signifie que u_n est presque égal à v_n, de plus en plus proche à mesure que n grandit. D'où la terminologie : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette notion d'équivalence est surtout intéressante quand on veut comparer deux infinis ou deux zéros : on peut ainsi dire que deux infinis ont la même taille, i.e. qu'ils ont le même ordre de grandeur, etc.

Exemple $n^2 + n + 5 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+5}{n^2} = 1$. $\qquad \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1$.

✖✖✖ **<u>Attention</u> !** $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 0 \iff u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Or on ne travaille jamais avec la suite nulle — quel intérêt ? C'est pourquoi vous ne rencontrerez certainement jamais l'expression « $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 0$ » en mathématiques. Banissez-la de vos copies !

Théorème Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. $\quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

Démonstration Par définition, dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ c'est dire qu'il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N à partir duquel $u_n = \eta_n v_n$. C'est donc dire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et un rang N à partir duquel $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$, i.e. $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$. C'est, enfin, exactement dire que $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$. ■

✖✖✖ **Attention !** Les propositions « $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ » et « $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$ » ne sont en aucun cas équivalentes ; c'est même pire : aucune de ces deux propositions n'implique l'autre. Le théorème précédent nous explique pourquoi : dire que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$, c'est dire que $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)$, et non pas $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$.

Par exemple $n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n$, mais pourtant $(n+1) - n \underset{n\to\infty}{\not\sim} 0$; inversement $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 0$, mais pourtant $\dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\not\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

✎✎✎ **En pratique** La remarque qui suit est essentielle : quand vous cherchez un équivalent, votre résultat ne doit JAMAIS se présenter comme une SOMME DE DEUX TERMES DISTINCTS. Par exemple, si l'on vous demande un équivalent de n^2+n+1 lorsque n tend vers ∞, ne répondez pas : $n^2+n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2+n$. C'est correct puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n} = 1$, mais parfaitement inintéressant. Car vous pouvez encore comparer n^2 et n, et en l'occurrence $n \underset{n\to\infty}{=} o(n^2)$. L'équivalence intéressante est donc : $n^2+n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2$.

2.2 Opérations sur les équivalents

Théorème (Opérations sur les équivalents) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites.

(i) La relation « être équivalentes » est réflexive : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

(ii) La relation « être équivalentes » est symétrique : si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

(iii) La relation « être équivalentes » est transitive :
$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \text{ et si } v_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n, \text{ alors } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n.$$

(iv) Dans les petits o, on peut remplacer toute suite par une suite équivalente :
$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \text{ et si } u'_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n \text{ et } v'_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n, \text{ alors } u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v'_n).$$

(v) Deux suites équivalentes ont le même signe à partir d'un certain rang :
$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \text{ et si } u_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang, alors } v_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang.}$$

(vi) Avec le produit, tout va bien :
$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u'_n \text{ et si } v_n \underset{n\to\infty}{\sim} v'_n, \text{ alors } u_nv_n \underset{n\to\infty}{\sim} u'_nv'_n.$$

(vii) Avec l'inverse, tout va bien :
$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \text{ et si } u_n \neq 0 \text{ à partir d'un certain rang, alors } \frac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}.$$

(viii) Avec les puissances, tout va bien :
$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \text{ et si } u_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang, alors } u_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} v_n^\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ix) Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

✖✖✖ **Attention !** Avec les équivalents deux opérations sont formellement interdites.

- **Somme :** si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et si $u'_n \underset{n\to\infty}{\sim} v'_n$, on n'a pas forcément $u_n + u'_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n + v'_n$.
  Par exemple, $n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n$ et $3-n \underset{n\to\infty}{\sim} -n+1$, mais $4 \underset{n\to\infty}{\not\sim} 1$.
- **Composition :** si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, on n'a pas forcément $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} f(v_n)$.
  Par exemple, $n \underset{n\to\infty}{\sim} n + \ln n$, mais si on compose à gauche par $x \longmapsto e^x$, $e^n \underset{n\to\infty}{\not\sim} ne^n$.

Démonstration

(i) Posons $\eta_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n = \eta_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 1$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

(ii) Par hypothèse, il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N à partir duquel $u_n = \eta_n v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 1$, il existe un rang N' à partir duquel $\eta_n > 0$. Posons alors $\eta'_n = 1$ pour tout $n < N$ et $\eta'_n = \dfrac{1}{\eta_n}$ pour tout $n \geqslant N$. Alors $v_n = \dfrac{u_n}{\eta_n} = \eta'_n u_n$ à partir du rang $\max\left\{N, N'\right\}$ et de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \eta'_n = 1$, donc $v_n \underset{\to\infty}{\sim} u_n$.

(iii) Par hypothèse, il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N à partir duquel $u_n = \eta_n v_n$; de même il existe une suite $(\eta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N' à partir duquel $v_n = \eta'_n w_n$. Posons alors $\eta''_n = \eta_n \eta'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n = \eta_n v_n = \eta_n \eta'_n w_n = \eta''_n w_n$ à partir du rang $\max\left\{N, N'\right\}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \eta''_n = 1$ par produit. Finalement $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$.

(iv) Puisque $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 0 et un rang N à partir duquel $u_n = \varepsilon_n v_n$. Puisque $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u'_n$, alors $u'_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$ via (ii), donc il existe une suite $(\eta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N' à partir duquel $u'_n = \eta'_n u_n$. Enfin $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} v'_n$, donc il existe une suite $(\eta''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N'' à partir duquel $v_n = \eta''_n v'_n$. Posons $\varepsilon''_n = \varepsilon_n \eta'_n \eta''_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u'_n = \eta'_n u_n = \eta'_n \varepsilon_n v_n = \eta'_n \varepsilon_n \eta''_n v'_n = \varepsilon''_n v'_n$ à partir du rang $\max\left\{N, N', N''\right\}$, et de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon''_n = 0$, donc $u'_n \underset{n\to\infty}{=} o(v'_n)$.

(v) Par hypothèse, il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un rang N à partir duquel $u_n = \eta_n v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 1$, $\eta_n > 0$ à partir d'un certain rang N'. Alors u_n et v_n ont le même signe à partir du rang $\max\left\{N, N'\right\}$, d'où le résultat.

(vi) Par hypothèse, il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N à partir duquel $u_n = \eta_n u'_n$; de même il existe une suite $(\eta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un rang N' à partir duquel $v_n = \eta'_n v'_n$. Posons $\eta''_n = \eta_n \eta'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n v_n = \eta_n u'_n \times \eta'_n v'_n = \eta''_n u'_n v'_n$ à partir du rang $\max\left\{N, N'\right\}$ et de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \eta''_n = 1$, donc $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\sim} u'_n v'_n$.

(vii) à (ix) Au travail ! ■

Théorème (Limites et équivalents) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

(i) Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux une limite et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ où **ℓ est un réel non nul**, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell$.

✖✖✖ **Attention !**

- La réciproque de l'assertion (i) est fausse : on peut avoir $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ sans avoir $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre à ce chapitre, car justement les équivalents permettent de distinguer des suites qui ont pourtant la même limite.
Par exemple, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ mais $2^n \underset{n\to\infty}{\not\sim} n$; de même $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ mais $\dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\not\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
- Quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Cela dit, en général, $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\not\sim} u_n$ — considérer $u_n = 2^n$.

Démonstration

(i) Par hypothèse, il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et un rang N à partir duquel $u_n = \eta_n v_n$. Du coup, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en possède une aussi et ces limites sont égales ; et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas en posséder non plus.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^\times$, alors comme $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\ell} = 1$, et donc on a bien $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell$. ■

2.3 Exemples fondamentaux

Théorème (Exemples fondamentaux d'équivalents) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de limite nulle** et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Logarithme, exponentielle, puissances :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad \ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

$$e^{u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad e^{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n).$$

$$(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha u_n, \quad \text{i.e.} \quad (1+u_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{=} 1 + \alpha u_n + o(u_n).$$

2) Fonctions trigonométriques circulaires :

$$\sin u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad \sin u_n \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

$$\cos u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1, \quad \text{i.e.} \quad \cos u_n \underset{n\to\infty}{=} 1 + o(1) \quad \text{et} \quad \cos u_n - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}, \quad \text{i.e.} \quad \cos u_n \underset{n\to\infty}{=} 1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

$$\tan u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad \tan u_n \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

3) Fonctions trigonométriques circulaires inverses :

$$\text{Arcsin } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad \text{Arcsin } u_n \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

$$\text{Arccos } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}, \quad \text{i.e.} \quad \text{Arccos } u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{\pi}{2} + o(1) \quad \text{et} \quad \text{Arccos } u_n - \frac{\pi}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n, \quad \text{i.e.} \quad \text{Arccos } u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{\pi}{2} - u_n + o(u_n).$$

$$\text{Arctan } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad \text{Arctan } u_n \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

4) Fonctions trigonométriques hyperboliques :

$$\text{sh } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad \text{sh } u_n \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

$$\text{ch } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1, \quad \text{i.e.} \quad \text{ch } u_n \underset{n\to\infty}{=} 1 + o(1) \quad \text{et} \quad \text{ch } u_n - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}, \quad \text{i.e.} \quad \text{ch } u_n \underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

$$\text{th } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n, \quad \text{i.e.} \quad \text{th } u_n \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

✖✖✖ **Attention !**

- L'hypothèse « $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ » n'est pas là pour décorer.
- Ne mélangez jamais les petits o et les équivalents ! Par exemple, $(1+u_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} 1+\alpha u_n + o(u_n)$ est une erreur classique. Soucieux de l'éviter, certains d'entre vous écriront du coup $(1+u_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} 1+\alpha u_n$. Là, c'est correct mais idiot, car $1+\alpha u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1$ — on a perdu le terme αu_n de précision $o(u_n)$. Je vous rappelle que vos équivalents ne doivent **jamais** se présenter comme une **somme de termes distincts**. Bref : apprenez bien et distinguez bien les formules du théorème précédent, autant leur version « équivalents » que leur version « petits o ».

✎✎✎ **En pratique** Pour $\alpha = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ dans le théorème précédent, on obtient les formules : $\frac{1}{1+u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 - u_n + o(u_n)$ et $\sqrt{1+u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n)$. Il est utile de connaître bien ces deux cas particuliers.

Démonstration

- Sauf cas particulier, la technique générale est la suivante. On part d'une fonction f définie au voisinage de 0 et dérivable en 0 — ici $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, sin, cos, tan, Arcsin, Arccos, Arctan, sh, ch ou th. Par définition du nombre dérivé, on sait qu'on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$. Composant avec la limite $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, on obtient $\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n)-f(0)}{u_n} = f'(0)$ ou encore $\frac{f(u_n)-f(0)}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} f'(0)+o(1)$, ce qui s'écrit aussi $f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} f(0)+f'(0)u_n+o(u_n)$. Cette formule est notre résultat.

En réalité, cette technique n'est pleinement convaincante que dans le cas où u_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Si ce n'est pas le cas, on commence par réécrire la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ sous la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(x)+f'(0)x+o(x)$ — nous définirons proprement cette notation ultérieurement — puis on remplace x par u_n.

- Pour cos et ch, une formule « à l'ordre 2 » est énoncée, i.e. dont la précision n'est pas seulement en $o(u_n)$, mais carrément en $o(u_n^2)$, ce qui est plus fin.

  Pour cos, il faut se souvenir que : $\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(2x)=1-2\sin^2 x$.
  Pour $x=\frac{u_n}{2}$, cela donne : $\cos u_n = 1-2\sin^2\frac{u_n}{2} \underset{n\to\infty}{=} 1-2\left[\frac{u_n^2}{4}+o\left(\frac{u_n^2}{4}\right)\right] \underset{n\to\infty}{=} 1-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)$.
  Pourquoi ? On a $\sin\frac{u_n}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$ car $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{2}=0$ via le point précédent relatif au sinus. Passant au carré on obtient : $\sin^2\frac{u_n}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{4}$, i.e. $\sin^2\frac{u_n}{2} \underset{n\to\infty}{=} \frac{u_n^2}{4}+o\left(\frac{u_n^2}{4}\right)$ comme annoncé.

  On raisonne de la même façon avec ch, après avoir montré la formule : $\forall x\in\mathbb{R},\quad \text{ch}\,(2x)=1+2\text{sh}^2 x$. ■

Exemple $\text{ch}\, e^{-n}-\cos\frac{\pi}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}$.

En effet Comme $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}=0$, on dispose via le théorème précédent des formules suivantes :

$$\text{ch}\, e^{-n}-1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^{-2n}}{2}, \qquad \text{i.e.}\quad \text{ch}\, e^{-n} \underset{n\to\infty}{=} 1+\frac{e^{-2n}}{2}+o\big(e^{-2n}\big),$$

$$\text{et}\qquad \cos\frac{\pi}{n}-1 \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\pi^2}{2n^2}, \qquad \text{i.e.}\quad \cos\frac{\pi}{n} \underset{n\to\infty}{=} 1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Mais devons-nous travailler avec les versions « équivalents » ou les versions « petits o » de ces formules ? **Parce qu'il est interdit d'additionner des équivalents**, nous n'avons pas le choix : nous devons travailler avec des petits o. Du coup :

$$\text{ch}\, e^{-n}-\cos\frac{\pi}{n} \underset{n\to\infty}{=} \left(\frac{e^{-2n}}{2}+o\big(e^{-2n}\big)\right)-\left(-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad \text{car } e^{-2n} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{=} \frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{comme voulu.}$$

Les concepts développés dans ce chapitre sont très utiles pour calculer des limites.

Exemple $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{2}\, e^{\frac{1}{n}}-\text{Arccos}\,\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}+1$.

En effet La limite cherchée se présente initialement comme une forme indéterminée. Mais $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Du coup :

$$n\left(\frac{\pi}{2}\, e^{\frac{1}{n}}-\text{Arccos}\,\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} n\left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \underset{n\to\infty}{=} n\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{=} \frac{\pi}{2}+1+o(1). \qquad \text{C'est bien notre résultat.}$$

3 Domination

La notion de domination introduite ci-après est très utile en mathématiques, mais il faut bien avouer que vous l'utiliserez moins que les notions de négligeabilité et d'équivalence en MPSI. En deuxième année, elle vous rendra de précieux services quand vous étudierez la notion de série.

3.1 Définition

Définition (Domination) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ et un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant K|v_n|$.
Cette relation se note $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$ et se lit « u_n est un grand O de v_n ».

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang N, dire que $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$ revient à dire que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée.

✖✖✖ **Attention !** La domination n'implique ni la négligeabilité, ni l'équivalence — mais nous verrons dans un instant que le résultat est vrai dans l'autre sens. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{3n} = 9n \quad \text{et} \quad u_{3n+1} = n \quad \text{et} \quad u_{3n+2} = 1.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left\{\begin{array}{lll} |u_{3n}| & = 9n & \leqslant 3 \times |3n| \\ |u_{3n+1}| & = n & \leqslant 3 \times |3n+1| \\ |u_{3n+2}| & = 1 & \leqslant 3 \times |3n+2| \end{array}\right.$ et donc : $|u_n| \leqslant 3|n|$. Conclusion : $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(n)$.

On voit sur cet exemple que la domination n'est pas un sous-concept des concepts de négligeabilité et d'équivalence, car ici il est faux que $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(n)$ et tout autant que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$. La domination nous fournit une information spécifique : u_n a beau être tantôt « un peu plus grand » que n — quand $u_{3n} = 9n$ — tantôt « un peu plus petit » — quand $u_{3n+1} = n$ — et tantôt « très petit » — quand $u_{3n+2} = 1$ — en tout cas u_n **n'est jamais « beaucoup plus grand » que** n.

✖✖✖ **Attention !** $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(0) \iff u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Or on ne travaille jamais avec la suite nulle — quel intérêt ? C'est pourquoi vous ne rencontrerez certainement jamais l'expression « $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(0)$ » en mathématiques. Banissez-la de vos copies !

Le résultat suivant est un cas particulier de la définition de la domination, très important.

Théorème (Suite bornée et $O(1)$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors : $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(1) \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Comme l'usage des petits o, l'usage des grands O peut être étendu à des contextes divers. Par exemple, la proposition $(n+1)^2 + n\sin(n\pi\sqrt{3}) \underset{n\to\infty}{=} n^2 + O(n)$ signifie simplement que $(n+1)^2 + n\sin(n\pi\sqrt{3}) = n^2 + x_n$ où $x_n \underset{n\to\infty}{=} O(n)$.

3.2 Opérations sur les grands O

Théorème (Opérations sur les grands O) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) La négligeabilité (resp. l'équivalence) implique la domination :

$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \quad (\text{resp. } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n), \text{ alors } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n).$$

(ii) La multiplication par un réel non nul ne compte pas :

$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n) \text{ et si } \lambda \neq 0, \text{ alors } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(\lambda v_n) \text{ et } \lambda u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n).$$

(iii) La somme de deux suites dominées par une **<u>même</u>** suite est dominée :

$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n) \text{ et si } u'_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n), \text{ alors } u_n + u'_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n).$$

(iv) La relation « être dominée » est transitive :

$$\text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n) \text{ et si } v_n \underset{n\to\infty}{=} O(w_n), \text{ alors } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(w_n).$$

(v) Avec le produit, tout va bien : $\left\{\begin{array}{l} \text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n) \text{ et si } u'_n \underset{n\to\infty}{=} O(v'_n), \text{ alors } u_n u'_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n v'_n). \\ \text{si } u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n), \text{ alors } u_n w_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n w_n). \end{array}\right.$

(vi) Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante et si $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{=} O\big(v_{\varphi(n)}\big)$.

Démonstration

(i) Supposons qu'on ait $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Dans les deux cas il existe une suite $(\iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (de limite 0 ou 1) et un rang N à partir duquel $u_n = \iota_n v_n$. Or en tant qu'elle est convergente, $(\iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée en valeur absolue par un certain $K \in \mathbb{R}_+$. Alors $|u_n| \leqslant K|v_n|$ à partir du rang N, donc $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$.

(ii) à (vi) Débrouillez-vous. ■

✖✖✖ **Attention !** Avec les grands O deux opérations sont formellement interdites.

- **Somme des deux côtés :** si $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$ et si $u'_n \underset{n\to\infty}{=} O(v'_n)$, on n'a pas forcément $u_n + u'_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n + v'_n)$.
  Par exemple, on a $n-1 \underset{n\to\infty}{=} O(n^2)$ et $1 \underset{n\to\infty}{=} O(1-n^2)$, mais pourtant $n \underset{n\to\infty}{\cancel{=}} O(1)$.
- **Composition :** si $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$, on n'a pas forcément $f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} O\big(f(v_n)\big)$.
  Par exemple, on a $n \underset{n\to\infty}{=} O(n^2)$, mais pourtant, si on compose à gauche par $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\cancel{=}} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

4 Exemples et applications

Le résultat suivant n'est pas au programme mais vous allez le rencontrer tellement souvent en prépa que je vous conseille de l'avoir en tête. Et puis c'est joli.

Théorème (Constante d'Euler) Il existe un réel $\gamma \in [0,1]$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

En particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$. Le réel γ s'appelle la *constante d'Euler*. On a approximativement $\gamma \approx 0,577$.

Démonstration Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $\displaystyle v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

- Nous aurons besoin de l'inégalité suivante : $\forall x \in \,]-1,\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$. On la démontre en étudiant le signe de la fonction $x \longmapsto x - \ln(1+x)$ — dérivabilité, calcul de la dérivée, signe de la dérivée, variations et tout le toutim.

- Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0 \qquad \text{via le premier point pour } x = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

- Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} \\ &= -\frac{-1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right) \leqslant 0 \qquad \text{via le premier point pour } x = \frac{-1}{n+1}. \end{aligned}$$

- Enfin : $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par composition.

- Nous avons finalement montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers un réel que nous notons γ et qui vérifie : $u_1 \leqslant \gamma \leqslant v_1$. Or $u_1 = 1 - \ln 2 \geqslant 0$ et $v_1 = 1$, donc $\gamma \in [0,1]$.

- Nous avons montré que : $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right] = \gamma$. Cela revient à dire que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
  Or puisque $\gamma \underset{n\to\infty}{=} o(\ln n)$, on a aussi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + o(\ln n)$, ou encore $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$ comme voulu. ■

Exemple $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[5]{1+\frac{6}{n}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\sin\frac{1}{n}} = \dfrac{13}{30}$. Etudiez attentivement la démonstration suivante.

En effet On a ici affaire à une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever l'indétermination, nous devons étudier la taille des zéros du numérateur et du dénominateur : l'un des deux est-il plus grand que l'autre ? Nous allons effectuer cette comparaison grâce à l'aide des équivalents et des petits o. Nous utiliserons librement le théorème relatif aux opérations sur les petits o et les équivalents, sans toujours préciser quelle règle vient d'être utilisée.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sqrt[5]{1+\frac{6}{n}} \underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{6}{5n} + o\left(\frac{6}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{6}{5n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}\right\}$$

Par différence : $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[5]{1+\frac{6}{n}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{3n} - \frac{6}{5n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} -\frac{13}{15n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ 3\sin\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{=} \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}\right\}$$

Par différence : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\sin\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} -\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Remarquez bien que, parce qu'on souhaitait faire des additions, on n'a pas eu recours aux équivalents, mais aux petits o. En revanche, à présent, on souhaite diviser les deux résultats partiels obtenus ci-dessus. Comme il est pratique de diviser avec des équivalents (et non avec les petits o), on abandonne les petits o.

$$\left\{\begin{array}{lll} \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[5]{1+\frac{6}{n}} \underset{n\to\infty}{=} -\frac{13}{15n} + o\left(\frac{1}{n}\right) & \text{donc} & \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[5]{1+\frac{6}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{13}{15n} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\sin\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{=} -\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) & \text{donc} & \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\sin\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2}{n} \end{array}\right.$$

$$\text{donc} \quad \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[5]{1+\frac{6}{n}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\sin\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-\frac{13}{15n}}{-\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{13}{30}, \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[5]{1+\frac{6}{n}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\sin\frac{1}{n}} = \frac{13}{30}.$$

Exemple $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

En effet

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} &= \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n} + \ln n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n(n+1)} = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &\underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{\ln n}{n^2}\left[1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\ln n}{n^3} + o\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \\ &\underset{n\to\infty}{=} \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{car } \frac{\ln n}{n^3} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

A ce stade, nous avons obtenu un résultat meilleur que celui que nous cherchions. En effet, nous voulions montrer que $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$, i.e. que $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln n}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$. Mais nous avons réussi à obtenir un *développement asymptotique* plus précis : $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln n}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n^2} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ce développement est plus précis car $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$. Alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$. En particulier — mais c'est moins précis — $u_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{n} + O(1)$.

En effet

- Par définition, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$.

  1) **Initialisation :** On a bien $\sqrt{0} = 0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant 1 = \sqrt{0} + 1$.

  2) **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. Faisons l'hypothèse que $\sqrt{n-1} \leqslant u_{n-1} \leqslant \sqrt{n-1} + 1$. Ajoutons n.

$$n \leqslant \sqrt{n-1}+n \leqslant u_{n-1}+n \leqslant \sqrt{n-1}+n+1 = (n-1)+\sqrt{n-1}+1+1 \leqslant (n-1)+\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}+1 \leqslant \left(\sqrt{n-1}+1\right)^2.$$

  Et un petit coup de racine carrée : $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{u_{n-1} + n} = u_n \leqslant \sqrt{n-1} + 1 \leqslant \sqrt{n} + 1$. C'est fini.

- Montrons que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

  Nous venons de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$, donc : $1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$ via le théorème des gendarmes, i.e. que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$ comme voulu.

- Montrons que : $u_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

  Partons de l'égalité $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{u_{n-1} + n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left[\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right]$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$.

  Remarquons ensuite que : $\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\sqrt{n-1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n} = 0$.

  Du coup : $\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_{n-1}}{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

  Il ne nous reste plus qu'à multiplier par $\sqrt{n}$: $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left[\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}$.

  Ce résultat signifie exactement que $u_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$ comme voulu.

✌ ✌ ✌ **Explication** Avant de clore ce chapitre, ajoutons une dernière couche d'intuition à la notion d'équivalent. Dans les deux derniers exemples, nous avons montré que $\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que $u_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$. Ces deux exemples présentent une analogie structurelle que l'on peut présenter ainsi :

$$\frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n+1} \underset{n\to\infty}{=} \underbrace{\frac{\ln n}{n^2}}_{\text{L'équivalent}} + \underbrace{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\substack{\text{Le reste, négligeable} \\ \text{devant l'équivalent}}} \qquad \text{et} \qquad u_n \underset{n\to\infty}{=} \underbrace{\sqrt{n}}_{\text{L'équivalent}} + \underbrace{\frac{1}{2} + o(1).}_{\substack{\text{Le reste, négligeable} \\ \text{devant l'équivalent}}}$$

L'équivalent apparaît ainsi comme terme dominant dans les développements asymptotiques — on devrait en fait parler d'**<u>un</u>** équivalent. Il est, de par sa taille, ce qu'on voit en premier ; tout le reste est bien là, mais négligeable. C'est un peu comme quand vous pénétrez dans une pièce : vous voyez d'abord que vous entrez dans une cuisine ; vous ne prêtez attention à la couleur des rideaux qu'ensuite.